

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2023 - 2024**



**Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Θανάσης Νικολόπουλος
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης
Ισαάκ Χιονίδης**

**Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης
Νίκος Τούντας**



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου
9ο Γενικό Διαγώνισμα

6-4-2024

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 4

A4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Έστω ακόμα συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ και $x_1, x_2 \in [\alpha, +\infty)$. Να αντιστοιχίσετε καθέναν από τους πίνακες της στήλης Α με το πλήθος θέσεων ακροτάτου της συνάρτησης f ή g από τη στήλη Β, γράφοντας το γράμμα που αντιστοιχεί στον πίνακα της στήλης Α και δίπλα του τον αριθμό που αντιστοιχεί στη στήλη Β.

Στήλη Α		Στήλη Β													
Πίνακες προσήμου των f', g'		Πλήθος θέσεων τοπικού ακροτάτου των f, g													
α.	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px 10px;">α</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_0</td> <td style="padding: 2px 10px;">β</td> <td style="padding: 2px 10px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f'(x)$</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	x_0	β	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	-		0	
x	$-\infty$	α	x_0	β	$+\infty$										
$f'(x)$		+	0	-											
β.	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px 10px;">α</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_0</td> <td style="padding: 2px 10px;">β</td> <td style="padding: 2px 10px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f'(x)$</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	x_0	β	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	+		1	
x	$-\infty$	α	x_0	β	$+\infty$										
$f'(x)$		+	0	+											
γ.	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px 10px;">α</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_1</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_2</td> <td style="padding: 2px 10px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$g'(x)$</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	x_1	x_2	$+\infty$	$g'(x)$		+	0	-	0	+	2
x	$-\infty$	α	x_1	x_2	$+\infty$										
$g'(x)$		+	0	-	0	+									
δ.	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px 10px;">α</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_1</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_2</td> <td style="padding: 2px 10px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$g'(x)$</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">-</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	x_1	x_2	$+\infty$	$g'(x)$		+	0	+	0	-	3
x	$-\infty$	α	x_1	x_2	$+\infty$										
$g'(x)$		+	0	+	0	-									
ε.	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px 10px;">α</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_1</td> <td style="padding: 2px 10px;">x_2</td> <td style="padding: 2px 10px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$g'(x)$</td> <td style="background-color: #cccccc;"></td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	x_1	x_2	$+\infty$	$g'(x)$		+	0	+	0	+	
x	$-\infty$	α	x_1	x_2	$+\infty$										
$g'(x)$		+	0	+	0	+									

Μονάδες 5

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

β. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

γ. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta).$$

Μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x + 2}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 3

B4. Έστω $\varepsilon: y = -\frac{13}{16}x + \frac{35}{8}$.

Υλικό σημείο $M(x, y)$ κινείται επί της ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του από την αρχή O των αξόνων τη χρονική στιγμή που το M έχει συντεταγμένες $\left(2, \frac{11}{4}\right)$.

Μονάδες 6

B5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = \frac{2}{1 + e^{f(x)}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 1$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Γ1. α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 2

β) Η f είναι κοίλη.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 4

β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$.

Μονάδες 3

Γ4. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της

στο $O(0,0)$ και της ευθείας $x=1$ ισούται με $E(\Omega) = \frac{(f(1))^2 - 8f(1) + 8}{4}$ τμ.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 2x, x > 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $(x_0, f(x_0))$ το σημείο καμπής, να δείξετε ότι $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι $f'(x_0) > 0$ και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} - 2$.

Μονάδες 5

Δ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x^3+1} + \ln \frac{x^3+1}{3x} + 6x = e^{3x} + 2x^3 + 2, x > 0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες.

Μονάδες 5

Καλή τύχη!